MASTER COPY

Tel. 388/9837745

ANALISI 2

L

(lezioni totali in aula: 56)

Master Copy
Copisteria
050/834212 - 388/9837745

L'INTORNO, PUNTO INTERNO, ESTERNO ...

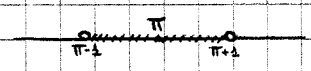
Uno spazio si dice **METRICO** se è dotato di una norma (o meno) e quindi di una funzione **DISTANZA** $d(x,y)$ (vedi proprietà).
Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}^m$, definiamo una **sfera** $B(x_0,\rho) \equiv B_\rho(x_0)$ cioè di centro x_0 e raggio ρ:

$$B_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x-x_0| < \rho\} \qquad \text{SFERA APERTA}$$

$$\overline{B}_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x-x_0| \leq \rho\} \qquad \text{SFERA CHIUSA}$$

(sono compresi i punti del "cerchio")

in $\mathbb{R}^1$ $\quad B_1(\pi) = \{x \in \mathbb{R} : |x-\pi| < 1\}$



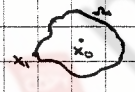
Questo è l'INTORNO, cioè i punti vicini ad x_0 non più distanti del raggio ρ (il luogo dei punti).

- L'INTORNO (SFERICO) di CENTRO x_0 e RAGGIO ρ è $B_\rho(x_0)$, solitamente aperta.

Consideriamo:
insieme ("sigma") $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$

- $x_0 \in \mathbb{R}^m \Rightarrow$ x_0 si dice **INTERNO** ad Ω se $\boxed{\exists \rho : B_\rho(x_0) \subset \Omega}$ $\quad x_0 \in \Omega$

cioè se esiste una sfera di raggio ρ e centro x_0 che è totalmente appartenente ad Ω. Quindi oltre ad x_0, tutti i punti "vicini" devono appartenere ad Ω:



x_0 è INTERNO
x_1 NO

Per esempio: $[-1,1]$ i punti interni sono $]-1,1[$

$\complement\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m : x \notin \Omega\}$ (complementare cioè allo spazio esterno ad Ω)

- x_0 si dice **ESTERNO** ad Ω se è INTERNO AL COMPLEMENTARE $\quad x_0 \in \complement\Omega$
- x_0 si dice di **FRONTIERA** se non è NÈ INTERNO NÈ ESTERNO, cioè: $\boxed{\forall \rho \quad \Omega \cap B_\rho(x_0) \neq \varnothing \ \in \ \complement\Omega \cap B_\rho(x_0) \neq \varnothing}$

cioè qualsiasi sia il raggio della sfera, ogni intorno di x_0 ha punti comuni con Ω e con il $\complement\Omega$

ESEMPIO: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^1$: $\Omega = \mathbb{Q}$ razionali

Non ci sono punti interni perché per ogni razionale, qualsiasi sferetta include reali. Non ci sono punti esterni per lo stesso motivo. Quindi ogni $x \in \mathbb{R}^1$ è di frontiera.

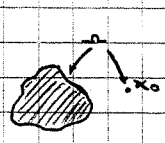
Prendiamo: $y = x^2$  $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x^2\}$

Il punto $(0,0)$ non è compreso in Ω. Prendiamo una funzione intermedia: $\frac{1}{2}x^2$

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon^2}{8}\right) \in B_\varepsilon(0,0) \overset{\text{se e solo che}}{\iff} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^4}{64}} < \varepsilon$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

- x_0 si dice **ISOLATO** per A se: $x_0 \in A$
  - $x_0 \in A$ (cosa non richiesta per un punto di frontiera)
  - $\exists \bar{\rho} : B_{\bar{\rho}}(x_0) \cap A = \{x_0\}$



A è i punti dell'insieme e $x_0 \Rightarrow x_0$ è isolato

È isolato se esiste una certa sfera per cui non comprende punti dell'insieme se non sè stesso!

- x_0 si dice di **ACCUMULAZIONE** per A se $\forall \rho > 0 \quad \exists x \in A : x \in B_\rho(x_0) - \{x_0\}$

cioè ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di A DISTANTI da x_0 (approssimabile).

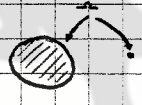
Il punto di accumulazione non è detto che deve appartenere all'insieme! Però nell'intorno del punto di accumulazione ci devono essere infiniti punti di A, qualunque sia la grandezza di questa sfera.
Se è isolato non può essere di accumulazione.

INSIEME APERTO, CHIUSO, LIMITATO, CONNESSO

- A si dice **APERTO** se ogni suo punto è interno: $\forall x_0 \in A \quad \exists \rho > 0 : B_\rho(x_0) \subseteq A$ esempio: $]0,1[$
- A si dice **CHIUSO** se il complementare è aperto, e quindi ogni punto del complementare è interno al complementare.
  Possibili alternative:
  - è chiuso se contiene i propri punti di frontiera (∂)

    $[-1,1]$ contiene la frontiera → è chiuso
    ogni punto al di fuori è interno al complementare → è chiuso

  - è chiuso se contiene i propri punti di accumulazione ($d A$)



La frontiera è la circonferenza più il punto
I punti di accumulazione sono tutti quelli della sfera

- A si dice **LIMITATO** se esiste una sfera che contiene lo spazio:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^m, \rho > 0 : B_\rho(x_0) \supseteq A$$

(INCLUDE)



- A si dice **CONNESSO** se comunque io scelga due punti dell'insieme, il segmento che li unisce è tutto incluso nell'insieme:

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad (1-\lambda)x_1 - \lambda x_2 \in A \text{ con } \lambda \in [0,1]$$

(SEGMENTO CHE LI UNISCE)



NORMA

$$\text{NORMA}\quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} \quad \Rightarrow \quad |x| \geq \sqrt{x_i^2} = |x_i| \quad \text{(VALORE ASSOLUTO)}$$

$|x|$ è maggiore della singola componente

Da ciò deriva che **se $|x| \to 0$, $x_i \to 0$!**

Inoltre:

prendiamo $|x_i| \geq |x_j| \quad \forall j = 1 \dots m$ prendo la componente maggiore: $\max(x_j)$

$$|x| \leq \sqrt{m\, x_i^2} = \sqrt{m}\,|x_i|$$

(si è visto prima)

$$\max|x_j| \leq |x| \leq \sqrt{m}\, \max|x_j| \qquad \text{(dove } m \text{ è la dimensione dello spazio)}$$

Da qui deriva che la convergenza di x è legata alla convergenza delle sue componenti.

LIMITE DI SUCCESSIONE

Dire che una successione converge: $\lim_{m\to\infty} x_m = x \in \mathbb{R}^m$ (termine m-esimo di una succes.)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r \in \mathbb{N} : \forall m > r \quad |x_m - x| < \varepsilon$$

(norma in $\mathbb{R}^m$; piccola a piacere) — CONVERGENZA

Questo è equivalente a dire: $\lim_m |x_m - x| = 0$ (norma) quindi $x_m \to x$ se la distanza tende a 0, cioè la norma della differenza. Se la norma non può essere definita si considera proprio la distanza $d(x_m, x)$.

Prendiamo per esempio $\mathbb{R}^2$, la successione sarà del tipo $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ cioè avremo un oggetto $\begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$. Quindi la successione di un vettore ad N componenti in realtà diventa N successioni, una per componente. Per quello che si è visto:

$$\max(x_j) \leq |x| \leq \sqrt{N}\, \max(x_j)$$

Per fare quindi il limite di un vettore, si fa un limite per ogni componente!

ESEMPIO: $a(n) = \left(1, \frac{1}{n}\right)$ $\quad \lim_{n\to\infty} = (1, 0)$ il vettore converge a questo valore

Per quanto detto si vede facilmente:

$$x_m \to 0 \iff (x_m)_i \to 0 \qquad i = 1 \dots N$$

In condensato: **UN VETTORE CONVERGE SE TUTTE LE COMPONENTI CONVERGONO**

Una successione sarà invece divergente se qualsiasi stella si consideri, il vettore starà fuori da un certo punto in poi

$x_m \in \mathbb{R}^m \qquad \lim_{m\to\infty} x_m = \infty$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r : \forall m > r \quad |x_m| > \varepsilon}$$

(ε: grande a piacere; r: è maggiore sempre da r in poi)

DIVERGENZA

Questo equivale a dire che $\lim |x_m| = +\infty$ cioè la distanza tende a $+\infty$. Qui $|x_m| \in \mathbb{R}$!

(lim: NORMA)

Si è visto vi è un legame tra componenti e vettori. In particolare:

UN VETTORE DIVERGE SE ALMENO UNA DELLE SUE COMPONENTI VA ALL'INFINITO

Infatti: $|x_m| = \sqrt{x_{m_1}^2 + x_{m_2}^2 + \dots + x_{m_N}^2}$ se solo uno va a $+\infty$, gli altri sono ≥ 0 e quindi $|x_m| \to \infty$

ESEMPIO: $a(m) = \left(m, \frac{1}{m}\right)$

$$\left|\left(m, \frac{1}{m}\right)\right| = \sqrt{m^2 + \frac{1}{m^2}} \geq \sqrt{m^2} = m \to \infty$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Un vettore che non diverge e non converge è per definizione **OSCILLANTE**.

PUNTI DI ACCUMULAZIONE E CONVERGENZA

$x_0 \in \partial\Omega$ (insieme dei punti di accumulazione)

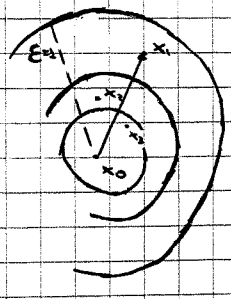
$\exists x_m \in \Omega \qquad x_m \neq x_m$ con $m \neq m$

allora $x_m \to x_0$

Dato un punto di accumulazione, esiste una successione x_m NON COSTANTE, x_m tende al punto di accumulazione

DIMOSTRAZ:

Se $x_0 \in \partial\Omega$ (definizione) allora $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in \Omega : x \in B_\varepsilon(x_0) - \{x_0\}$



cerchiamo di verificare il teorema con dei raggi ε differenti:

$\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists x_1 \in \Omega : x_1 \in B_1(x_0) - \{x_0\}$

Il nuovo raggio sarà più piccolo della distanza con x_1:

$\varepsilon_2 < |x_1| \quad \Rightarrow \quad \exists x_2 \in \Omega : x_2 \in B_{\varepsilon_2}(x_0) - \{x_0\}$

$$\varepsilon_m = \min\left\{\frac{1}{m}, \frac{|x_{m-1}|}{2}\right\} \leftarrow \text{In generale il raggio } m\text{-esimo viene scelto con questo criterio:}$$

Si prende il minimo tra la distanza di x_{m-1} dimezzata e il termine $\frac{1}{m}$! In questo modo si è certi che ε_m